UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – DCET
PÓS-GRADUAÇÃO *LATU SENSU* EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PITÁGORAS VASCONCELOS DOS ANJOS

ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA EM AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA: SUAS POTENCIALIDADES PARA A CONSTRUÇÃO DA PROVA MATEMÁTICA

ALAGOINHAS – 2016

PITÁGORAS VASCONCELOS DOS ANJOS

ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA EM AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA: SUAS POTENCIALIDADES PARA A CONSTRUÇÃO DA PROVA MATEMÁTICA

Monografia apresentada no componente curricular Trabalho de Conclusão de Curso como requisito parcial para obtenção de título de Especialista em Educação Matemática pela Universidade do Estado da Bahia *campus* II.

Área de concentração: Educação Matemática e Ensino.
Orientador: Prof. Dr. Antônio Teófilo Ataíde do Nascimento.

ALAGOINHAS – 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

A597a Anjos, Pitágoras Vasconcelos dos.

Atividades de investigação matemática em ambientes de geometria dinâmica: suas potencialidades para a construção da prova matemática ./Pitágoras Vasconcelos dos Anjos – Alagoinhas, 2017.
62f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Universidade do Estado da Bahia. Departamento de Educação. Colegiado de Matemática. Campus II.

Orientador: Profº. Drº. Antônio Teófilo Ataíde do Nascimento .

1. Geometria - Estudo e ensino. 2. Matemática - Estudo e ensino. I. Nascimento, Antônio Teófilo Ataíde do. II. Universidade do Estado da Bahia. Departamento de Educação. III. Título.

CDD 372.7

Biblioteca do Campus II / Uneb
Bibliotecária: Rosana Cristina de Souza Barretto - CRB: 5/902

ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA EM AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA: SUAS POTENCIALIDADES PARA A CONSTRUÇÃO DA PROVA MATEMÁTICA

Monografia apresentada no curso de pós-graduação *latu sensu* em Educação Matemática da Universidade do Estado da Bahia, Campus II por Pitágoras Vasconcelos dos Anjos. Aprovada em 03 de junho de 2016.

Banca examinadora:

____

Orientador - Dr. Antônio Teófilo Ataíde do Nascimento
Universidade do Estado da Bahia (UNEB)

____

Examinador - Msc. Danton de Oliveira Freitas
Universidade do Estado da Bahia (UNEB)

____

Examinador - Msc. José Carlos de Santana Queiróz
Universidade do Estado da Bahia (UNEB)

ALAGOINHAS - 2016

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais por sempre confiarem e permanecerem ao meu lado nos momentos mais difíceis.

Aos meus amigos por sempre se fazerem presentes.

Aos mestres por compartilharem o conhecimento.

Ao Professor Teófilo pela paciência e disposição em me orientar.

Aos membros da banca por terem aceitado o convite.

Como todos os jovens eu decidi ser um gênio,
mas, felizmente, o riso interveio.

Cléa Lawrence

ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA EM AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA: SUAS POTENCIALIDADES PARA A CONSTRUÇÃO DA PROVA MATEMÁTICA

Pitágoras Vasconcelos dos Anjos,
graduado em licenciatura em Matemática,
aluno de especialização na Universidade do Estado da Bahia,
pvda_15@hotmail.com.

Nas últimas décadas o ensino de geometria tem apresentado idas e vindas que culminaram em um ensino marcado por aulas expositivas que alternam discurso oral do professor e intermináveis cálculos escritos que fazem a geometria parecer um amontoado de definições e fórmulas sem sentido, empobrecendo o seu ensino ao esconder sua essência dedutiva. Em contraste, surgem os ambientes de geometria dinâmica e as atividades de investigação matemática que marcam ponto contra um ensino fortemente pautado na repetição e memorização de fórmulas. Neste trabalho discutimos suscintamente as potencialidades dos ambientes de geometria dinâmica em provocar, através de atividades de investigação, a prova matemática no ensino de Geometria Plana. Para tanto discorremos sobre: a Matemática e seu carácter investigativo, nos alinhando com as percepções de Lakatos (1976) e Davis e Hersh (1985); as atividades de investigação matemática, na perspectiva de Ponte (2003) e Brocardo (2001); e a geometria dinâmica, sob a ótica de Gravina (1996, 1998, 2001) e Janzen (2011). Os resultados obtidos através de um levantamento bibliográfico constataram que essa simbiose formada por atividades de investigação matemática e a geometria dinâmica não apenas favorece à construção da prova matemática como traz uma nova maneira de se conceber a geometria.

Palavras-chave: Geometria Dinâmica. Atividades de Investigação Matemática. Prova Matemática.

MATHEMATICAL RESEARCH ACTIVITIES IN DYNAMIC GEOMETRY ENVIRONMENTS: ITS POTENTIALITIES FOR MATHEMATICAL PROOF CONSTRUCTION

Pitágoras Vasconcelos dos Anjos,
undergraduate degree in Mathematics,
specialization course student at Universidade Estadual da Bahia,
pvda_15@hotmail.com.

Over the last decades the geometry teaching has presented advances and retreats which culminated in a teaching that gave emphasis on expositve classes that alternate the teacher's oral discourse and endless written calculations that make geometry seems like a congeries of meaningless definitions and formulas, impoverishing its teaching by hiding its deductive essence. On the other hand, come to light dynamic geometry environments and mathematical research activities which go against a teaching substantially ruled by repetition and memorization of formulas. In this work we discuss briefly about the potentialities of dynamic geometry environments to bring on, through investigation activities, the mathematical proof of plane geometry teaching. To do so we expatiate upon: Mathematics and its investigative feature, aligning ourselves with the perceptions of Lakatos (1976) and Davis & Hersh (1985); the mathematical research activities in the perspective of Ponte (2003) and Brocardo (2001); and dynamic geometry in the perspective of Gravina (1996, 1998, 2001) and Janzen (2011). The results obtained through a bibliographical survey verified that this symbiosis created by mathematical research activities and dynamic geometry not only helps the making of mathematical research activities but also show a new way to conceive geometry.

Key-words: Dynamic Geometry, Mathematical Research Activities, Mathematical Proof.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

Durante a década de 70, devido ao Movimento Matemática Moderna, o ensino de geometria passou a ser ministrado de modo excessivamente rigoroso. Os livros didáticos traziam sem restrições quantificadores, axiomas, e outros elementos característicos do rigor lógico da Geometria Euclidiana. Fato que associado a falta de habilidades dos profissionais para aplicação de tal abordagem e a substituição do ensino de geometria nas séries iniciais por educação artística culminaram na quase erradicação do ensino de geometria nas duas décadas seguintes (FERREIRA, 2005).

Os professores não se sentiam preparados para seguir tamanho rigor e passaram a deixar os conteúdos de geometria para o fim do ano letivo caso ainda houvesse tempo hábil. O mercado editorial na mesma tendência passou a dedicar os últimos capítulos de seus livros aos conteúdos de geometria. Como rotineiramente não havia tempo suficiente, a geometria foi gradualmente extinguida dos currículos escolares (SOUZA, 2001).

É somente no fim da década que 80 com as novas diretrizes para a educação que o ensino de geometria esboça uma nova guinada, com objetivos claros para os diferentes níveis de ensino que incluíam menor nível de formalização para séries iniciais e com a parte dedutiva, em tese, guardada para os anos finais.

Como resultado de idas e vindas, hoje, na prática, o ensino de geometria quando existe é marcado por aulas expositivas que alternam discurso oral do professor e cálculos escritos infindáveis na lousa que fazem a geometria parecer um amontoado de definições e fórmulas sem sentido que, além de criar uma concepção distorcida sobre a geometria e ser pouco eficaz em transpor as dificuldades inerentes ao aprendizado, empobrece o ensino uma vez que esconde a essência dedutiva que ela traz em seu bojo. Uma metodologia completamente arcaica que embora seja necessária em alguns momentos pode ser competentemente substituída, pelo menos em parte, por outros recursos como as tecnologias da informação e comunicação.

É sabido que mudanças sempre provocam temores, mas ficar estagnado em uma sociedade cada vez mais dinâmica e informatizada penalizaria a escola a obsolescência e, até mesmo a completa ineficiência.

Neste contexto de mudanças de metodologia e de inserção de tecnologias da informação e comunicação nas escolas é que surgem os programas de geometria dinâmica. Este tipo de programa se mostra um importante recurso no ensino da geometria, pelo fato de permitir a construção de figuras geométricas e a modificação dinâmica do mesmo, através da ferramenta "arrastar" possibilitando, portanto, a visualização da figura por diferentes perspectivas, o teste das várias possibilidades, e, por conseguinte, favorecendo a formulação de conjecturas.

Outro movimento que tem ganhado corpo no ensino da matemática são as atividades de investigação matemática que ganharam notoriedade com os estudos do grupo Matemática para Todos (MPT) em Portugal. Essas atividades têm o potencial de, reservadas as proporções, aproximar o trabalho do aluno ao estudar matemática com o trabalho do matemático profissional, uma vez que sob tal ambiente o aluno é convidado a estar continuamente investigando situações, testando validade de proposições e construindo argumentações para comunicar as suas descobertas em um tipo de esboço de prova matemática (SKOVSMOSE, 2000).

Isoladamente, ambas atividades possuem características bastante interessantes para o ensino, mas uma simbiose entre elas traz algum benefício novo? Mais que isso: há algo que favoreça a aula de matemática ir além de amontoado de fórmulas? Isto é: quais as potencialidades que as atividades de investigação matemática em ambientes de geometria dinâmica podem trazer para os alunos na construção de uma demonstração matemática? Esta é a nossa questão diretora.

Buscamos nesse trabalho discutir as potencialidades dos ambientes de geometria dinâmica em provocar, através de atividades de investigação, a prova matemática no ensino de Geometria Plana. De modo específico buscamos: (i) compreender o que se entende por 'prova matemática; (ii) analisar as potencialidades das atividades de investigação e dos ambientes de geometria dinâmica.

A motivação para essa pesquisa se sustenta em dois pilares: (i) no fato de por meio de experiências empíricas o pesquisador notar que o uso desses programas de geometria dinâmica costumam atuar como uma espécie de calculadora gráfica além de julgar que o uso desses programas com atividades que vão além de tutoriais têm a potencialidade de auxiliar na prova matemática, denotando, portanto, uma questão pessoal da curiosidade do pesquisador; (ii) também é pertinente para a comunidade, pois lança luz em alguns aspectos da matemática que em geral, na prática docente, são relegados ao completo esquecimento, a prova matemática, trabalhos como esse constituem uma importe fonte de informação para professores de matemática que, podem utilizar das ferramentas aqui apresentadas para aprimorar a sua prática em sala de aula a fim de conduzir seus alunos a uma melhor aprendizagem da geometria.

1.1 Aspectos metodológicos

Ao que se refere aos aspectos metodológicos diante do problema e objetivo expostos a presente pesquisa tem o seguinte delineamento.

É aplicada quanto a natureza da pesquisa, pois visa gerar conhecimento para aplicação prática a fim de sanar problemas específicos. Já a abordagem do problema é qualitativa, uma vez que não iremos tratar de informações passíveis de serem mensuradas, estamos interessados em aprofundar a compreensão sobre interações em um determinado grupo (GERHARDT e SILVEIRA, 2009).

No que diz respeito aos objetivos é uma pesquisa exploratória, pois visa gerar maior familiarização com o tema de modo a torna-lo mais explícito. (GIL, 2002)

Por fim, no que tange os procedimentos técnicos esta é bibliográfica, tendo em vista que buscamos informações apenas em bancos de teses, periódicos, jornais e revistas. Só foram utilizados como fonte de informações materiais previamente elaborados. (GIL, 2002)

CAPÍTULO 2 – INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

Neste Capítulo falamos sobre a Matemática, enfatizando o modo de construção do conhecimento matemático - investigativo - e a maneira como ele é apresentado ao mundo. Seguimos apresentando as tarefas de investigação matemática como uma estratégia didática para o ensino dessa disciplina. Concluímos com algumas considerações sobre atividades de investigação em geometria.

2.1 Aspectos da natureza da Matemática

2.1.1 A lógica das provas e refutações

Historicamente o estilo textual usado para comunicar a Matemática descoberta é baseado no padrão definição-teorema-demonstração, como assinala Davis e Hersh (1985), e que se arrasta desde o consagrado Os Elementos escrito por Euclides em 300 a. C.. Esses elementos são comumente utilizados em livros texto de Matemática seguindo a mesma sequência apresentada e que resulta na construção de uma falsa concepção de que o processo de construção do conhecimento matemático é acumulativo-linear, que segue exatamente o modelo conceito primitivo-definição-axioma-teorema-demonstração. Mais que isso, esse modelo guarda consigo o formalismo da Matemática e o espírito estritamente dedutivista escondendo outros aspectos que são extremamente relevantes no processo de construção do conhecimento dessa Ciência, como a intuição e o espírito investigador que subjaz essa construção.

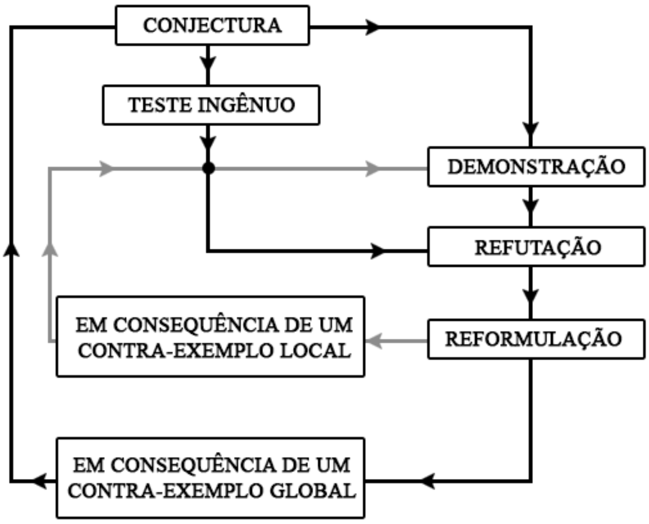
David e Hersh (1985, p. 63) assinalam que as publicações em Matemática acumulam " [...] formalismos sobre formalismos [...] três páginas de definições seguidas de sete lemas, e finalmente, um teorema cujas hipóteses ocupam meia página para serem enunciados, enquanto que a demonstração é essencialmente 'aplique os lemas 1-7 às definições A-H.".

Lakatos (1976), por sua vez, em seu livro A Lógica do Descobrimento Matemático: provas e refutações, sem deixar de compreender o papel da formalização e da dedução na Matemática, condena a visão estritamente formalista que sempre se vale do modelo definição-teorema-demonstração, um modelo baseado na *justificação*, em favor de um baseado na *descoberta* que evidencie no processo de comunicação da Matemática as suas idas e vindas, as quais ele julga acontecer através da lógica das provas e refutações. Nesse sentido Lakatos (1978) destaca

> A matemática é apresentada como uma série sempre crescente de verdades imutáveis e eternas. Possivelmente, não tem lugar contra-exemplos, refutações e críticas. Um aspecto autoritário é garantido para o assunto, [...]. O estilo dedutivista oculta a luta, esconde a aventura. Toda a história evapora, as sucessivas formulações provisórias do teorema durante a prova são relegadas ao esquecimento enquanto o resultado final é exaltado como infalibilidade sagrada (p. 186).

O diagrama simplificado da heurística da descoberta de Lakatos (1976), figura 1, ilustra a lógica da descoberta proposta por ele. A busca pela validação de uma conjectura envolve a experimentação, refutação e/ou refinamento de "sub-conjecturas" e, por fim, a demonstração ou refutação definitiva dessa. No diagrama é sugerido que o processo de demonstração de uma conjectura passa por sucessivas tentativas de demonstração que podem, ou não ser concretizadas.

Figura 1 – A heurística da descoberta de Lakatos



Fonte: Extraído de Davis e Hersh (1985, p. 276) e modificado pelo autor

São diversos os exemplos de matemáticos profissionais, inclusive expoentes dessa Ciência, que fazem referência a essa lógica das provas e refutações seja por meio de experiência empírica ou através de uma análise sobre o carácter da Matemática. Um exemplo é o caso do matemático Poincaré ele acreditava não existirem as chamadas funções fuchisianas e todo seu esforço era neste sentido, no entanto ele refuta essa conjectura e acaba por demonstrar exatamente o oposto.

> Havia já quinze dias que me esforçava por demonstrar que não podia existir nenhuma função análoga às que vim chamar depois de fuchsianas. Estava então na mais completa ignorância; sentava-me todos os dias à minha mesa de trabalho e ali permanecia uma ou duas horas ensaiando um grande número de combinações e não chegava a nenhum resultado. Uma tarde contra o meu costume, tomei um café preto e não consegui adormecer; as ideias surgiam em torpel, sentia que me escapavam, até que duas delas, por assim dizer, se encaixavam formando uma combinação estável. De madrugada tinha estabelecido a existência de uma classe de funções fuchsianas [...] (POINCARÉ, 1996, p. 9)

George Pólya (2006) em A Arte de Resolver Problemas também registra a sua visão sobre a Matemática que se mostra em consonância com a de Lakatos (1976) o autor deixa clara a sua visão de que a Matemática, muito embora pareça uma Ciência estática que se restringe ao encadeamento lógico-dedutivo de conhecimentos produzidos, ela também é a Ciência da experimentação, dos testes, da tentativa-e-erro: “ [...] a Matemática tem duas faces; é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais ... A Matemática em construção se aparece como uma Ciência experimental, indutiva. Ambos aspectos são tão antigos quanto a própria Matemática. ” (2006, p. 7).

O que fica comumente registrado nas ideias dos autores apresentados é que o conhecimento matemático é construído por ações que se identificam com um processo de investigação. Também é lugar comum a concepção de que a Matemática em processo de construção – o fazer matemática – tem, na essência de sua atividade, idas e vindas, um caminho cheio de dúvidas, isso nada mais é do que um reflexo do carácter humano da atividade matemática e que fica registrado nas palavras de Bento Caraça (1945, p.12, grifo nosso) quando se refere ao fazer matemática “descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, *para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições*”.

2.1.2 A Prova Matemática

A história da Matemática relata que a primeira demonstração data 600 a. c. e foi feita pelo matemático Thales de Mileto que demonstrou que o diâmetro do círculo o divide em duas partes iguais. Desde então a demonstração vem permeando a Matemática através dos séculos e igualmente se modificando, principalmente quando se analisa o nível de formalização (NAGAFUCHI; BATISTA, 2008)

Embora usualmente utilizemos as expressões prova e demonstração como sinônimos, em diversas áreas elas tem significados distintos, uma distinção que não se restringe a uma questão de nomenclatura, mas a práticas diferentes e que permitem analisar com maiores detalhes alguns aspectos que circundam da “prova matemática”

Afim de termos em mente o que é demonstração vamos analisar, à luz de Balacheff (1997), em caráter preliminar, algumas expressões que comumente são usadas para indica-la e que obstruem a análise dos fatos, pois unificam uma série de ações distintas.

Balacheff (2000) nos apresenta uma distinção entre argumentação, explicação, prova e demonstração. Para ele, *argumentação* é um processo presente em qualquer discurso que tenha como finalidade persuadir o interlocutor; *explicação* é um tipo particular de argumento que busca, através da racionalidade dos argumentos apresentados, convencer o interlocutor da veracidade do que comunica; a *prova* é uma explicação em que a explicitação da validade de uma certa afirmativa se dá no contexto de uma comunidade que possui regras ou normas acordadas entre seus membros. Por fim, *demonstração* é uma prova em que o contexto que nos referimos há pouco é a comunidade matemática.

> Na comunidade Matemática, essas normas estabelecem a apresentação de uma sucessão de enunciados, cada um dos quais é uma definição, um axioma, um teorema prévio ou um elemento derivado mediante regras pré-estabelecidas de enunciados que lhe precedem. Nesse caso as provas recebem o nome de demonstração. (BALACHEFF, 2000, p.149)

Balacheff (2000) também faz uma categorização de provas que tem como extremos: *provas pragmáticas* que são aquelas que se apoiam em esquemas de ação e *provas intelectuais* que são aquelas que o sujeito se distancia de ações concretas e passam analisar propriedades e suas relações.

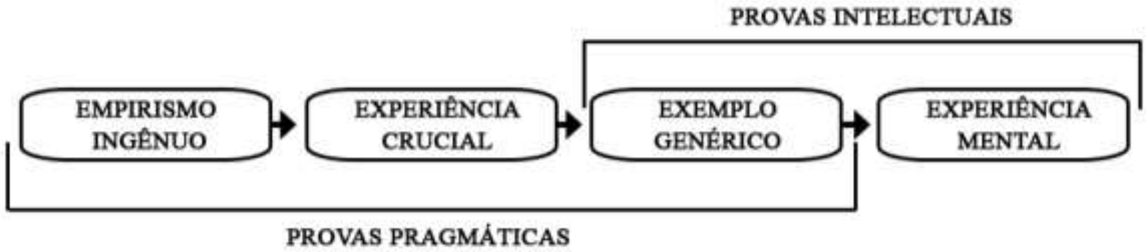
No processo de transição entre estas provas o sujeito passa por tipos intermediários e hierárquicos de provas que são determinados pelo nível de generalidade necessário para construir uma prova matemática nesses estágios.

- O *empirismo ingênuo*, quando se assegura a validade de um dado argumento a partir da verificação de um caso particular;
- A *experiência crucial* é quando aparece o primeiro sinal de generalização, há a experimentação de mais de um caso e, em geral, surgem casos menos comuns. Neste estágio surge a consciência da necessidade de verificar a validade da afirmação para um

grande número de casos, o caso geral, o que gera uma maior quantidade de experimentos em casos particulares sendo, inclusive, alguns casos não familiares;

- O *exemplo genérico* no qual a explicação das razões pelas quais uma determinada propriedade é verdadeira, mas isso é feito com um exemplo particular, com ciência de que este objeto usado no exemplo é um representante de classe;
- A *experiência mental* que consiste na "[...] ação interiorizada e separada de sua execução sobre um representante particular" (2000, p.27). Neste nível o sujeito já é capaz de validar o argumento através de um processo que não se sustenta mais em ações concretas, é capaz de usar um modelo teórico para validar o argumento.

Figura 2 – Relação tipos de prova segundo Balacheff



Fonte: do autor

A figura 2, acima, retrata a hierarquização da tipologia das provas proposta por Balacheff (1997) que destaca o exemplo genérico como a prova que marca a transição entre as provas pragmáticas e as provas intelectuais.

2.2 Tarefas de Investigação Matemática

A resolução de problemas é uma questão central da Matemática, é a sua força motriz, a Educação Matemática por sua vez usa a resolução de problemas como uma estratégia didática, que segundo Mendes (2009) marca posição contra um ensino pautado na memorização e exposição em face do desenvolvimento de habilidades cognitivas e do favorecimento da reflexão e questionamento, possibilitando, desse modo, que o aluno levante hipóteses, verifique sua validade e comunique os seus resultados com os colegas. Em síntese, as atividades de resolução de problemas permitem ao aluno criar possibilidades e testar hipóteses em busca de uma solução para o problema proposto.

A ideia de resolução de problemas foi ampliada de tal modo que os problemas apresentados não mais possuem um enunciado perfeitamente acabado que deixa claro o que o problema exige, isto é, o enunciado é suficientemente *aberto* e permite que o aluno, no processo de resolução do problema, seja agente construtor deste na medida em que, diante da proposta inicial, analisa e vislumbra possibilidades que vão além do que está dito no enunciado do problema. (MENEGHETTI; REDLING, 2012). O aluno não é delimitado dentro um uma problemática *fechada* que, em certo sentido, tolhe a sua criatividade e, como afirma Segurado e Pontes (1998, p. 3), "contribuem para criar nos alunos uma visão empobrecida do modo de trabalhar e aprender essa disciplina".

Nesta nova roupagem que a resolução de problemas apresenta, e que estamos a definir e dominar de *atividade de investigação* ou *tarefa de investigação matemática*, os problemas dão, propositalmente, margem ao aluno, durante a resolução, delimitar o que será seu 'objeto de estudo', uma vez que atividade é destituída de objetivos precisos e que vão sendo estruturados, pelos alunos através de processos de criação de conjecturas, teste de hipóteses, generalização de resultados, demonstração ou refutação. (Pontes e Matos 1996 *apud* Pontes e Segurado 1998).

De modo objetivo, Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado (1998, p. 9) definem *tarefas de investigação* como um tipo de atividade que:

> [...] dá ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, reflectir e generalizar. São actividades de cunho muito aberto, referentes a contextos variados (embora com predominância para os exclusivamente matemáticos) que podem ter como ponto de partida uma questão ou uma situação proposta.

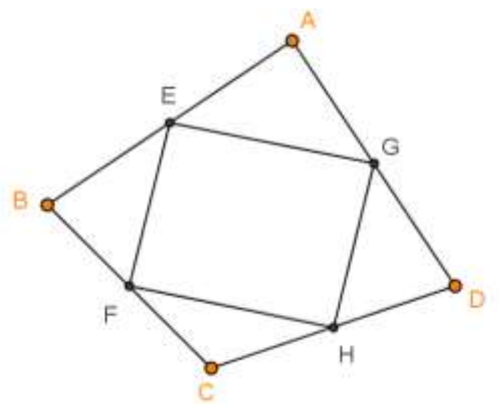
Como podemos notar há uma relação muito próxima entre *resolução de problemas* e as *atividades de investigação* isso em certa medida se dá pelo fato de ambas estratégias de ensino convergirem para a solução de problemas. Como diz Meneghet e Redling (2012) "O primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a ser resolvido" (p. 202). No entanto, há características claras que nos apontam as suas diferenças que não estão restritas apenas no tipo do problema proposto (aberto nas atividades de investigação e fechado na resolução de problemas), há também objetivos distintos em cada um deles. Para Pontes, Oliveira, Cunha e Segurado (1998) na resolução de problemas o objetivo é a estratégia usada para resolver o problema e a solução em si, já nas atividades de investigação o *processo* de resolução é o seu objetivo maior, nessas atividades a busca não é pelo certo, é pelo processo.

Ponte, Cunha, Oliveira e Segurado (1998) ainda destacam que:

> Um dos grandes objectivos das actividades de investigação é a condução dos alunos a graus progressivos de generalização e de abstracção. Consequentemente, a justificação das conjecturas apresentadas é uma componente importante do seu trabalho. (p.17)
>
> As investigações matemáticas caracterizam-se, igualmente, pelo estímulo que fornecem ao aluno para este justificar e provar as suas afirmações, explicitando matematicamente as suas argumentações perante os seus colegas e o professor. (p. 10)

Vejamos um exemplo clássico, dentre outros, encontrado em Gravina (2001) e Abrantes (1999), ilustrado na figura 3 abaixo. O problema consiste em descrever que tipo de polígono convexo é o EFGH em função do polígono também convexo ABCD, sabendo que os pontos E, F, G e H são pontos médios dos seguimentos AB, BD, DC e CA, respectivamente.

Figura 3 – Exemplo de atividade de investigação



Fonte: do autor

Gravina (2001) relata que os respondentes de sua pesquisa constataram empiricamente, através da experimentação, que o polígono HEFG – que chamaremos de polígono menor – é sempre um paralelogramo. A partir de então, diante da necessidade de justificar esse fato formalmente, após um processo de reflexão, surge a ideia de traçar as diagonais do polígono ABCD – que chamaremos de polígono maior – e, concluem pelo Teorema da Base Média, que o polígono menor sempre é um paralelogramo.

Seria possível encontrar uma melhor caracterização para o polígono menor? Será que é possível encontrar uma caracterização em função das diagonais? Se as diagonais do polígono maior forem perpendiculares, como será o polígono menor? Se as diagonais do polígono maior forem perpendiculares e de mesma medida, o que acontece? Essas relações são suficientes para conduzir a uma “boa caracterização”? Por que não iria? Seria possível encontrar uma boa caracterização associando o polígono menor ao fato de que o polígono maior pode ser um quadrado, retângulo ou losango? Isso é: se o polígono maior for um quadrado que tipo de polígono será o menor? Se for um losango que tipo de polígono o menor será? Mais que isso, seriam verdadeiras as recíprocas desses resultados? Se o polígono menor é um quadrado, então no maior também o é? Se o polígono menor for um losango, então o maior também é losango?

Como podemos observar o problema possibilita uma grande diversidade de conjecturas que serão alvo de uma tentativa de validação ou refutação, se validada segue, se refutada vislumbra uma nova possibilidade que pode ser uma conjectura nova ou um refinamento da original. Desse modo, o caminho para solução, assim como o problema, vai sendo construído a medida em que o as conjecturas levantadas são validadas ou refutadas em um processo de vai e vem característico do fazer matemática e que é denominado por Brocardo (2001) de “não linearidade” da atividade de investigação. O diagrama da heurística da descoberta de Lakatos, figura1, na seção 1.1.1, ilustra esse fato.

A atividade de investigação matemática, segundo Ponte (2010), é uma atividade mais complexa do que as demais tarefas matemáticas (exercícios, resolução de problemas e atividades de exploração), sem dúvidas, isso acontece pois ela “pressupõe sobretudo uma atitude, uma vontade de perceber, uma capacidade para interrogar, uma disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parecia certo”. (PONTE, 2003, p. 21) o que nem sempre é fácil.

É necessário destacar que “ser tarefa de investigação” é uma característica relacional entre a tarefa e o aluno que depende, dentre outras coisas, do convite para a realização, que deve ser suficientemente convidativo a ponto do aluno desenvolver a curiosidade de investigar o problema que lhe foi proposto, e de uma boa escolha do problema que além de levar todos os alunos a fazerem e testarem conjecturas deve ser um problema interessante e adequado ao nível de cada turma, nem fácil demais nem difícil demais a fim de não gerar desmotivação no aluno.

> […] o que pode servir perfeitamente como cenário para investigação a um grupo numa situação particular pode não representar um convite para um outro grupo de alunos. Se um cenário[1] pode ou não dar suporte a uma abordagem de investigação é uma questão empírica que tem que ser respondida por meio da prática dos professores e alunos envolvidos. (SKOVSMOSE, 2008, p. 5)

[1] Skovsmose (2008) defini um cenário para investigação como um ambiente que possibilita o aluno desenvolver uma atividade de investigação matemática. Ele destaca 3 possíveis cenários de investigação matemática: referência a realidade, referência a semirrealidade e referência a matemática pura.

Um exemplo simples sobre essa característica relacional das tarefas de investigação é se o aluno já houver feito uma dada atividade de investigação em algum momento de sua trajetória, caso o professor o proponha novamente essa mesma tarefa deixará de ser uma tarefa de investigação matemática e passará a ser um exercício.

Durante a realização dessas atividades os alunos costumam comunicar-se a fim de compreender a estratégia de investigação que um colega usou ou ainda para o auxiliar o que agrega mais valor ao ambiente de aprendizagem e transforma a sala de aula em uma "pequena comunidade matemática" onde há, investigação descobertas e divulgação. Isto é, os alunos desenvolvem, guardadas as diferenças de níveis, um processo análogo ao realizado pelos matemáticos de carreira. O fato de haver interação entre os alunos durante as etapas de busca pela solução auxilia, segundo Pontes, Oliveira, Cunha e Segurado (1998, p.6) a " clarificar seu pensamento para alcançar uma compreensão mais aprofundada de conceitos e princípios matemáticos".

Assim como nas demais áreas da matemática o ensino de geometria por meio de atividades de investigação é possível e aconselhável, inclusive há autores que destacam que ela tem características específicas que facilitam atividades desse cunho. Para Abrantes (1999) o apelo intuitivo propiciado pela possibilidade de manipular e de ver os objetos em estudo associado ao fato de poder ser inserida nos currículos desde as séries iniciais com naturalidade a geometria desponta, possivelmente, como a área da Matemática que mais propícia a atividades de cunho investigativo. Já Freudenthal (1973) citado por Abrantes (1999) diz que a geometria constitui um importante recurso de problematização tendo em vista a sua aproximação com a realidade. O autor ainda destaca que a geometria possui duas faces, de uma, o fato das "descobertas serem feitas com olhos e mãos" e da outra a necessidade de argumentação lógica das suas conclusões, destacando, portanto, o caráter logico-intuitivo da geometria.

Desse modo, tarefas de investigação são um recurso didático que permitem ao aluno o fazer matemática, por alguns instantes a sala de aula se transforma em uma pequena comunidade acadêmica de matemáticos, onde há produção, tal como os matemáticos os fazem, por um processo de criação de conjecturas, experimentação, refinamento de conjecturas e validação ou refutação; e comunicação da matemática. Essas atividades não só estimulam o aprendizado da matemática, mas também permitem ao aluno criar uma postura mais ativa na resolução de problemas, desenvolvimento do gosto pela disciplina.

Encerramos com uma reflexão de Braumann (2002) sobre o papel das atividades de investigação no aprendizado da matemática:

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão “detectivesca” indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andarem e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (p.1)

CAPÍTULO 3 – AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA

Neste capítulo falamos brevemente sobre as tecnologias no ensino de matemática enfatizando os ambientes de geometria dinâmica. Antes de falar de geometria dinâmica será feita uma distinção acerca da linguagem utilizada a fim de deixar claro a divisão conceitual de certos elementos. Definimos o que são esses ambientes, falamos de suas potencialidades e do comportamento do objeto geométrico nesse ambiente. Encerramos apresentando algumas opções de softwares desse tipo.

3.1 As tecnologias no ensino

É notória a influência das novas tecnologias no nosso cotidiano, nos últimos anos elas vêm se tornando uma grande aliada na execução de diversas atividades devido a sua eficiência e praticidade. Presente em todos os setores da sociedade desde um registro de ponto no trabalho até uma operação financeira no banco, a utilização destes recursos tem-se tornando uma prática cada vez mais frequente, exigindo, portanto, uma constante necessidade da sociedade readaptar-se às novas tecnologias emergentes.

Muito embora tenha havido e ainda hajam pessoas que não são adeptas do uso do computador por conta do conservadorismo, financiamento ou medo de sair da zona de conforto como aponta Borba e Penteado (2001) eles têm ganhado espaço nas escolas que vêm gradativamente incorporando as modificações externas de uma sociedade altamente informatizada e começa a utilizar os mecanismos tecnológicos como instrumento facilitador da aprendizagem.

Levy (1993) destaca que essa inserção é algo paulatino e que não deve ocorrer repentinamente.

> É certo que a escola é uma instituição que a cinco mil anos se baseia no falar/ditar do mestre, na escrita manuscrita do aluno e, há quatro séculos em um uso moderado da impressão. Uma verdadeira integração tecnológica supõe um abandono de hábito antropológico mais que milenar, o que não pode ser feito em alguns anos. (p.34)

Neste contexto de resistência e mudança metodológica é que gradualmente vem despontando os ambientes informatizados de ensino e aprendizado e que vem modificando a dinâmica escolar, tanto para alunos, quanto para professores que são constantemente convidados a sair de sua zona de conforto diante dessas novas ferramentas.

3.2 A geometria dinâmica

3.2.1 O objeto geométrico

Uma afirmação muito famosa atribuída ao matemático Euclides diz que não há caminhos reais para se chegar a geometria. Na prática essa afirmação induz a um processo de reflexão de pelo menos uma questão: na realidade concreta não existe a geometria tal qual conhecemos; não existem quadrados, pois não é possível construir um polígono com lados exatamente iguais, não existem seguimentos de reta, pois por mais que se tente não é possível construir um objeto somente com comprimento, destituído de altura ou largura. Isto é, a afirmação evidencia que a geometria, em sua essência, não é algo palpável, ela não pode ser tocada ou percebida pelos sentidos físicos. Ela só existe no campo abstrato do pensamento humano.

Neste sentido, os objetos que são feitos em folha de papel ou em telas sob o pretexto de ser, diga-se, um quadrado, é apenas uma representação de um objeto geométrico que existe somente no campo do pensamento. Nessa perspectiva é que Fischbein (1993) apresenta a teoria dos conceitos figurais

Para esse autor um objeto geométrico deve ter o seu conceito percebido através da junção de duas percepções distintas: o *campo figural* e o *campo conceitual*. O primeiro se reporta a representação mental ou física de um ente geométrico, a imagem de um paralelogramo, por exemplo. Já a no campo conceitual esse paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos paralelos, neste componente é que estão presentes as propriedades definidoras e, portanto, *invariantes* do objeto geométrico em questão.

Essa percepção dupla nos motiva a apresentar a seguinte definição proposta por Olivero (2002). *Desenho* é a representação genérica de uma família de objetos geométricos que estão associados ao componente figural do objeto em questão e que pode ser modificado, já a *figura* está relacionada as propriedades características definidoras e que não podem ser modificadas.

Desse modo, a imagem presente na figura 4 (página 24) é o desenho de um paralelogramo enquanto que *quadrilátero com lados opostos paralelos* é a figura do paralelogramo.

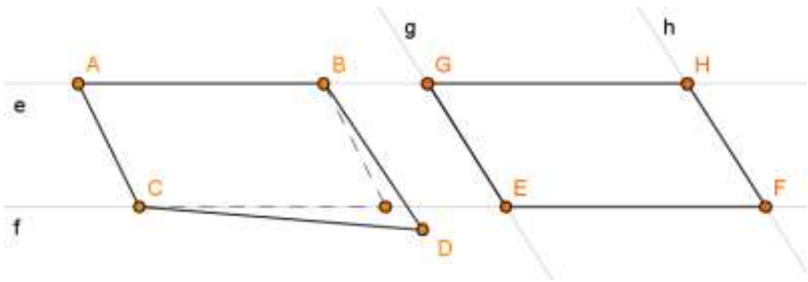
Vale destacar que essa distinção entre figura e desenho ganha uma maior notoriedade nos ambientes de geometria dinâmica. Os movimentos que são proporcionados por esses ambientes evidenciam a existência das duas componentes do objeto geométrico devido a forma como os objetos são construídos e por conta da ferramenta “arrastar”. De imediato, e antecipadamente, já poderíamos listar esse fato como a primeira potencialidade desse ambiente. Na seção seguinte falaremos especificamente sobre esses recursos

3.2.2 O arrastar: a estabilidade sob ação de movimento

Ambientes de geometria dinâmica são ferramentas de informática que oferecem régua e compasso virtuais de modo a permitir a construção de objetos geométricos a partir de suas propriedades definidoras bem como a manipulação desses objetos. Nestes ambientes, o processo de construção de objetos é feito a partir de ferramentas primitivas, que permitem, por exemplo, a criação de pontos, retas e funções (GRAVINA, 2001).

Nestes ambientes, a partir da construção via propriedades de um objeto geométrico, a modificação deste preserva as suas características iniciais que são determinantes para o objeto.

Figura 4 – Desenho feito à mão e por geometria dinâmica, respectivamente.



Fonte: do autor

O paralelogramo ABCD, na figura 4, foi construído usando a malha quadriculada do software de geometria dinâmica geogebra. Ao ser arrastado, digamos pelo vértice D, ele se deforma e deixa ser de ser um paralelogramo para ser um quadrilátero não-paralelogramo. Por outro lado, o paralelogramo GHFE foi construído do seguinte modo: a partir da reta determinada pelos pontos E e F, *f*, tomamos uma reta, *e*, paralela à *f* e passando por um ponto G fora de *f*; traçamos a reta, *g*, determinada pelos pontos E e G; paralelamente à *g*, tomamos a reta *h* passando por um ponto de *e* diferente de G. Desse modo, o polígono GHFE é um paralelogramo.

O processo descrito acima é o que foi denominado de construção por meio de propriedades, construído desse modo qualquer tipo de movimento que seja aplicado ao objeto geométrico preserva as características que foram impostas durante o processo de construção, as *invariantes*.

É relevante destacar que, neste contexto, o desenho pode, sim, ser alterado sem que, contudo, a figura também o seja. Já quando é construído ‘à mão livre’, isto é, sem imposição de vínculos entre objetos primitivos, ele colapsa ao ser submetido a algum tipo de ação de movimento e propriedades que pareciam compor o desenho não são mais vistas após o movimento, é como se a figura não tivesse sido realmente construída, sua definição fica em xeque. O desenho, na construção por propriedades, se modifica, mas não perde certas características que são invariantes, aquilo que os define, a figura é preservada. Uma ação em um desenho neste ambiente tem como resultado uma coleção de representares de uma mesma figura, *o desenho é um representante de classe*. (GRAVINA, 1996).

A possibilidade de se construir objetos geométricos via propriedades definidoras como foi elucidado acima é uma das principais proposituras da geometria dinâmica e implica em modificações da percepção do próprio objeto geométrico que não são vistas em construções estáticas no papel. Nessas construções, não há “matematicamente diferença”, por exemplo, entre os vértices do paralelogramo da Figura 4, mas no contexto da geometria dinâmica há. Isso acontece por conta de uma relação de dependência que é criada durante o processo de construção e que não permite a manipulação desses objetos.

Essa relação de dependência é explorada por Gravina (2001) que afirma haver uma relação funcional entre os objetos dependentes e independentes. No nosso exemplo, os pontos G,E,F são os objetos independentes, que conferem dinamismo ao desenho, e o paralelogramo GHFE, o dependente. De tal modo que o conjunto imagem dessa função sempre terá paralelogramos, desde que a sequência de “comandos” aplicados aos pontos seja preservada, isto, é a função não seja modificada.

Além do recurso construir objetos geométricos por meio de propriedades, outro considerado por alguns autores como Oliveiro (2002) como sendo o recurso de maior relevo dos programas de geometria dinâmica é a ferramenta “arrastar”, ela permite que o objeto selecionado seja movido, arrastado na tela do computador incorporando no desenho uma “dinamicidade subjacente”, como diz Janzen (2011). Já Gravina (2001), por sua vez, denomina esse recurso de *estabilidade sob ação de movimento*. Isso, pois sendo o objeto construído por meio de propriedades, ele resiste a deslocamentos que sejam aplicados às relações geométricas inicialmente impostas ao objeto, ou seja, as propriedades ficam estáveis diante do movimento do desenho.

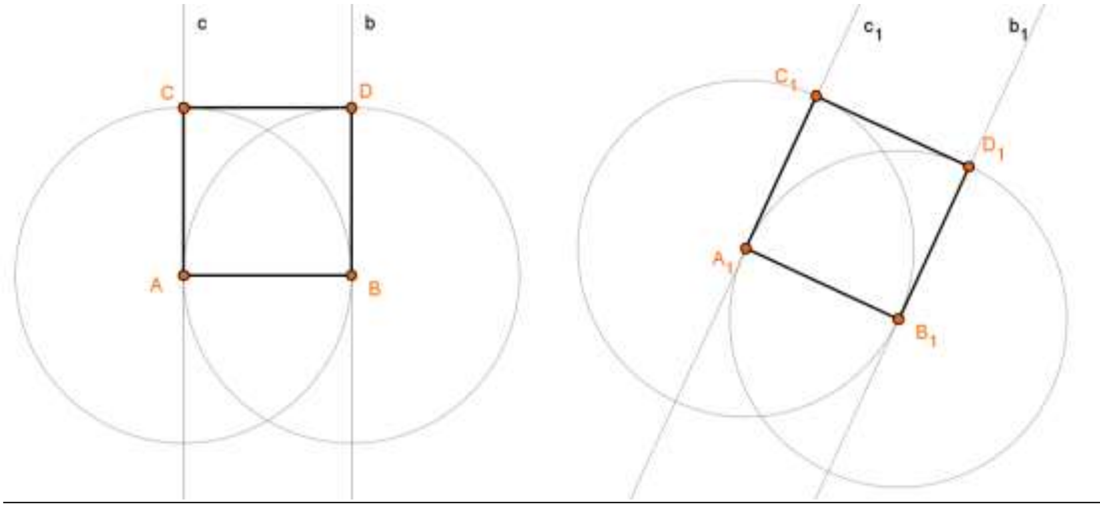
O “arrastar” modifica a forma como o objeto geométrico é visto como sublinha Laborde (1994) ao afirmar que um quadrilátero com quatro lados iguais e um ângulo reto só pode ser considerado um quadrado caso passe pela prova do arrastar, isto é, nesse caso, quando o desenho é arrastado por um dos seus vértices e permanece com os atributos de um quadrado. Nesses ambientes a própria definição dos objetos geométricos é ressignificada, a definição agora precisa ser estendida para os *desenhos em movimento*.

Janzen (2011), por sua vez, vai além do proposto por Laborde (1994), para o autor o recurso arrastar traz uma nova maneira de encarar não apenas o objeto geométrico, mas a geometria como um todo

> [...] a função de “arrastar” sugere novas maneiras de raciocinar e operar e até mesmo de conceber a geometria, alterando sua ontologia, constituída agora não mais de objetos geométricos senão de relações geométricas, explicitando, então, o caráter relacional dos objetos geométricos. (JANZEN, 2001, p. 49)

O movimento dinâmico-interativo possibilitado pelo arrastar permite que relações geométricas, que antes estavam implícitas na estaticidade do desenho à lápis e papel, agora fiquem evidentes, o desenho passa a ser visto como um representante de uma infinidade de objetos da mesma classe, as características do desenho prototípico, portanto, não são extrapoladas para a instancia conceitual do objeto, a figura (GRAVINA, 1996).

Figura 5 – Quadrado[2] prototípico em movimento



Fonte: Adaptado Gravina (2001)

Na figura 5, na página anterior, há o desenho prototípico de um quadrado (à esquerda), que foi desenhado com os lados paralelos à folha, no entanto após uma rotação (à direita) o desenho do quadrado é alterado, mas ainda assim ele permanece quadrado, ou seja, o desenho foge a forma padrão de apresentação, a prototípica, mas preserva as características invariantes que o identifica como um quadrado.

Uma discussão mais rigorosa da figura 5, acima, deve ressaltar que pela forma como ele foi construído, a priori, não é possível afirmar que o quadrilátero é um quadrado, pois o processo de construção não foi feito de modo a deixar explícito as características próprias de um quadrado: quadrilátero com lados iguais, lados opostos paralelos e ângulos internos retos. Para notar que esse desenho representa um quadrado é necessário 'encontrar' o que Gravina (2001) denomina de *fatos que estáveis implícitos*, as características que estão presentes na figura, que não foram declarados no processo de construção e que não se modificam sob ação de movimento.

Neste contexto Gravina (2001) diz que "uma família de objetos em movimento" (p. 89) substitui o objeto geométrico prototípico e auxilia na percepção dos fatos estáveis implícitos, que são passíveis de uma demonstração matemática. Janzen (2011, p.50), por sua vez, coloca que "esta compreensão é parte fundamental para a construção de uma demonstração". E Gravina segue

[2] Esse quadrado foi construído no geogebra do seguinte modo: determine o segmento de reta de extremos A e B; trace as retas c e b perpendiculares a AB passando respectivamente por A e B; construa as circunferências de centro A e raio AB e a circunferência de centro B e raio AB; chame a intersecção da reta c com a circunferência de centro A de C e a intersecção da reta b com a circunferência de centro B de D; trace o segmento CD.

> E é pelo recurso de estabilidade que os desenhos deixam de ser prototípicos e os alunos se tornam mais hábeis na identificação, quando em processo demonstração, de sub-configurações não prototípicas de propriedades já conhecidas, necessárias ao desenrolar de uma argumentação/demonstração. Assim, manipulando os objetos na tela, os alunos podem questionar os resultados de suas ações de imediato, conjecturando e testando a validade das conjecturas primeiramente através dos recursos de natureza empírica, podendo se engajar, num segundo momento, na construção de argumentações teóricas. (GRAVINA, 2001, p.89).

Os elementos que foram trazidos para a discussão acima só tomam essa notoriedade na geometria por conta da interatividade propiciada pela ferramenta arrastar, sem ela, mesmo que no lápis e papel, esses elementos existem, mas se escondem nos desenhos que não se movem.

Portanto, possibilidade de construir objetos por propriedades associada com a ferramenta arrastar constituem a essência da geometria dinâmica. Graças a esses recursos uma nova geometria é inaugurada, a geometria dos desenhos em movimento que abre um leque de possibilidades para o fazer e o compreender a Matemática.

3.2.4 As potencialidades

Definidas e analisadas algumas questões de relevo nos ambientes de geometria dinâmica agora, segue em destaque as potencialidades desses ambientes que são das mais diversas e que vão muito além de ser régua e compasso virtuais.

King e Schattschneider (1997) citado por Gravina (2001) destacam os benefícios desses softwares de geometria dinâmica sublinhando que eles favorecem a construção de desenhos pela precisão que é possibilitada pelas ferramentas do programa; melhorar a visualização das relações geométricas; a prova de teoremas mesmo que de modo experimental; construção de lugares geométricos bem como a sua transformação; e a construção de micromundos.

Já para Gravina (2001), além dessas possibilidades o uso desses ambientes incentiva o espírito investigativo, pois sua interface interativa “aberta a exploração” possibilita os experimentos de pensamento. Os objetos matemáticos são manipulados na tela do computador o que permite que o aluno levante conjecturas, teste hipóteses de modo inicialmente empírico, mas que pode evoluir para o raciocínio de uma demonstração formal.

O outro papel importante entre as potencialidades desses ambientes, ele auxilia na construção da concepção sobre a matemática, devido ao trabalho investigativo que faz o usuário desenvolver um trabalho similar, guardados os níveis de abstração, aos matemáticos de ponta.

Durante essa atividade os usuários “[...] conjeturam e, com o feedback constante oferecido pela máquina, refinam ou corrigem suas conjeturas, chegando a resultados que resistem ao “desenho em movimento, passando então para a fase abstrata de argumentação e demonstração matemática”. (GRAVINA, 1996, p. 2)

Gravina (2001) ainda destaca que esses ambientes possibilitam: promover, através da manipulação de objetos concreto-abstratos, “a ascensão de patamar de conhecimento, de empírico para inserido em modelo teórico” (p. 89); possibilidade de construir objeto geométricos por meio propriedades escolhidas; explicitar a relação que existe entre os componentes conceitual e figural do objeto geométrico bem como a sua “adequada fusão” (p. 90); deixam os alunos mais hábeis na identificação de uma subconfiguração não prototípica na qual está o objeto geométrico;

Zullato (2016, p.7) também comunga do mesmo posicionamento e afirma

> [...] o aluno pode formular suas próprias conjecturas e tentar verificar se elas são válidas. Ou seja, o próprio aluno irá realizar a verificação e validação da conjectura que formulou. Isso é possível devido aos recursos dos softwares, como o arrastar, que possibilita a simulação de diferentes casos da figura, como se o aluno estivesse verificando “todos” os casos possíveis de uma mesma família de configuração.

De Villiers (2002) assim como os demais também faz referência ao fato dos programas de geometria dinâmica auxiliarem em raciocínios dedutivos e acrescenta “[...] não só são meios poderosos de verificação de conjecturas verdadeiras, como também são extremamente úteis na construção de contra-exemplos para falsas conjecturas”. (p. 14)

Em suma, essas atividades favorecem o que Gravina (1998) chama de fazer matemática que consiste em “experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar” (p.1).

Dentre os softwares de geometria dinâmica disponíveis no mercado podemos destacar alguns pela simplicidade da interface e por serem programas de licença livre: *Cabri-Géometrè*, *Cinderela*, Winplot e Geogebra.

CAPÍTULO 4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

A forma como os ambientes de geometria dinâmica permitem que os objetos geométricos sejam construídos, associado à ferramenta arrastar possibilita uma nova forma de conceber a geometria e uma melhor percepção do objeto geométrico. Neste ambiente de aprendizagem os campos conceitual e figural do objeto geométrico como diz Janzen (2011) se fundem, permitindo a correta compreensão do objeto geométrico.

Percebemos, portanto, que é uma característica do ambiente de geometria dinâmica favorecer a investigação em geometria. Digamos que ele é receptivo a tarefas de investigação. Isso por causa de sua possibilidade de testar várias configurações em um curto espaço de tempo, além da fidelidade das construções do objeto geométrico que, por meio da intuição, auxilia na percepção de propriedades que podem ser alvo de conjecturas. No entanto destacamos que favorecer a investigação não é uma característica intrínseca a esses ambientes, isso está diretamente relacionado ao tipo de tarefa que nele é trabalhado.

Em se tratando de atividades de investigação, por exemplo, programas de geometria dinâmica funcionam como agente catalizador do processo de experimentação devido a sua capacidade de simulação dinâmica, isso permite que rapidamente conjecturas sejam levantadas, provadas ou refutadas permitindo que o usuário siga para uma nova etapa de exploração.

Mais que isso, o uso desses ambientes proporciona uma percepção diferente do objeto. O objeto geométrico deixa de ser simplesmente um desenho e passar a ser visto como uma propriedade conceitual, o objeto é visto pelas suas características definidoras. Este é um passo importante para entender que os objetos geométricos existem independentemente de seu desenho e que é no campo da figural que deve ocorrer a justificação para a validade de certa propriedade, mesmo que a percepção da validade desta tenha ocorrido no plano do objeto concreto-abstrato, na tela do computador.

Além disso, também é possível inferir que o ambiente criado por meio de atividades de investigação em ambientes de geometria dinâmica tem o potencial de auxiliar na construção da prova matemática. Os ambientes de geometria dinâmica permitem a simulação de possibilidades, de testes e experimentos dos mais variados. Os mesmos elementos que são indispensáveis no processo de fazer matemática proposto por Gravina (1996) e que indiretamente são evocados por Lakatos (1976) na sua lógica da descoberta matemática. Mais que isso, o fato da geometria dinâmica possibilitar o desenho, independentemente de ser dinâmico, auxilia em provas que sejam construídas via observação de ações concretas, as provas pragmáticas. E, por outro lado, como já referimos, o ambiente permite que o aluno compreenda o objeto geométrico além do desenho, isto é, ele percebe que o objeto no contexto proposicional, a figura, que pode ser um indício que pensamento abstrato e que certamente auxiliará na construção de provas intelectuais.

Não podemos deixar de assinalar que Pontes (1998) e Braumann (2002) dizem que só se aprende matemática, fazendo matemática, isto é, conjecturando, abstraindo, testando generalizando, demonstrando ou refutando. Isso é mais do que claro que esses ambientes possibilitam tais ações.

Em suma, esta simbiose tem o potencial de contribuir para a construção de uma prova matemática, seja ela uma prova pragmática ou intelectual, mas isso está fortemente associado a como é usado.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. **Investigações em geometria na sala de aula. In: Abrantes, P. et al. (Org.) Investigações matemáticas na aula e no currículo.** Lisboa: APM, 1999. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/igce/demac/maltempi/cursos/curso3/Artigos/Artigos_arquivos/p_153-167.pdf> acesso em: 26 jan. 2016.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas:una empressa docente**. Tradução Pedro Goméz. Bogotá, 2000. Disponível em: < https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133/document>. Acesso em: 04/02/2016.

BORBA, M. C., PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**. 5 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

BROCARDO, J. **As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8º ano**. Tese de doutorado (doutorado em educação). Universidade de Lisboa, Lisboa, 2001.

BRAUMANN, C. A. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática**. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.). Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores. pp. 5-24. Lisboa: SPCE, 2002.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: 1951.

DAVIS, P. J., HERSH, R. **A Experiência Matemática**. Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

FERREIRA, A. C. **Ensino da Geometria no Brasil: enfatizando o período do Movimento da Matemática Moderna**. In: V EDUCERE – III CONGRESSO NACIONAL DA ÁREA DE EDUCAÇÃO, 2005, Curitiba-PR, Anais. Curitiba, 2005, p.93-101.

FISCHBEIN, E, **The theory of figural concepts**. Educational Studies in Mathematics, v.24, n.2, p 139-162, 1993.

GERHARDT, T. E, SILVEIRA, D. T (orgs). **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4 ed. São Paulo: Atlas, 2007.

GRAVINA, M. A. SANTAROSA, L. M. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. In: Anais do IV Congresso RIBIE, 1998.

_________, M. A. **Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria**. In: Anais do VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte, MG, 1996.

_________, M. A. **Os Ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético-dedutivo**. Tese de doutorado (doutorado em informática na educação), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

JANZEN, E A**. O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica**. Tese de doutorado (doutorado em educação), Universidade de Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

LABORDE, C.; CAPPONI, B. **Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no Cabri-Geometre**. Ano 14, n.62, 1994.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático**. Tradução de Nathanael C. Caixeiro Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

_________, I. **História da ciência e suas reconstruções racionais**. Tradução de Emília Picado Tavares Marinho Mendes. Lisboa: Edições 70, 1978.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: O futuro do pensamento na era da informática**. São Paulo: 34, 1993.

OLIVERO, F. **The proving process within a dynamic enviroment**. Tese de doutorado. Universidade de Bristol. Inglaterra, 2002.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e Investigação em Sala de Aula: tecendo redes cognitivas de aprendizagem**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MENEGHETTI, R. C. G., REDLING, J. **Tarefas alternativas para o ensino e a aprendizagem de funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio**. Revista Bolema, Rio Claro-SP, v. 26, n. 42A, p. 193-229, 2012.

NAGAFUCHI, T, BATISTA, I**. O que é demonstração? Síntese de uma reconstrução histórico-epistemológica**. In: XII EBRAPEM, 2008, Rio Claro-SP, Anais. 2008.

POINCARÉ, H. **A invenção matemática**. In: ABRANTES, P. LEAL, C. & PONTE, J. P. (orgs). Investigar para aprender matemática. Lisboa: Projecto MPT e APM, p. 7-14, 1996.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P., BROCADO, J., OLIVERA H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**.3 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

______, J. P., OLIVEIRA, H., BRUNHEIRA, L., VARANDAS, J. M., & FERREIRA, C. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática**. Quadrante, 7(2), 41-70, 1998.

______, J. P., OLIVEIRA, H., CUNHA, H., SEGURADO, I. **Histórias de Investigações Matemáticas**. Lisboa: IIE, 1998.

______, J. P. **Explorar e investigar em Matemática: uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem.** Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática. v. 21, p. 13-30, 2010.

______, J. P. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. Investigar em Educação**. v. 2, p. 93-169, 2003.

SEGURADO, I., PONTE, J. P. **Concepções sobre a matemática e trabalho investigativo**. Quadrante, 7(2), p.5-40, 1998.

SOUZA, F. S. **Movimento da matemática moderna no Brasil: avanço ou retrocesso.** Dissertação de Mestrado. PUCRJ, 2001.

VILLIERS, M. **Para uma compreensão dos diferentes papeis da demonstração em geometria dinâmica**. 2012. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/280526956>. Acesso em 14/02/2016

SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação**. Bolema, v.14, p. 66-91, 2000.

____________, O. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica.** Tradução de Orlando de Andrade Figueiredo e Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas: Papirus, 2008.

_________, R. B. **O perfil dos professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica em suas aulas**. Disponível em: < http://tecmat-ufpr.pbworks.com/f/GT6_T11.pdf> acesso em 25/04/2016.